

Strömung

Versuchsziele:

*Experimentelle Überprüfung des Hagen-Poiseuill'schen Gesetzes
Durchführung zweier Methoden der Viskositätsbestimmung von Flüssigkeiten Ermittlung der Temperaturabhängigkeit der Viskosität am Beispiel von Glycerin*

Grundlagen:

Zu Versuchsbeginn sollten folgende Begriffe und Vorgänge erklärt werden können:

1. *Grundlagen der Strömung von Flüssigkeiten: turbulente und laminare Strömung, Reynolds-Zahl; Viskosität von Flüssigkeiten, phänomenologische Beschreibung der Temperaturabhängigkeit der Viskosität*
2. *Strömung durch eine Röhre → parabolisches Geschwindigkeitsprofil, Hagen-Poiseuille'sches Gesetz*
3. *Umströmung von Gegenständen in Flüssigkeiten → Stokes'sche und Newton'sche Reibung*
4. *Aufbau und Funktionsweise eines Ausfluß- sowie eines Kugelfall-Viskosimeters, zur Vorbereitung sollen die Aufgaben 3.2. und 3.3. bearbeitet werden*

1 Einleitung

Das Strömungsverhalten von Gasen und Flüssigkeiten spielt in vielen Bereichen des täglichen Lebens eine wichtige Rolle. Grundsätzlich sind zwei Arten von Strömungen zu unterscheiden: die laminare und die turbulente Strömung. Die laminare Strömung stellt dabei den geordneten Fall dar. Sie ist erwünscht, wenn ein möglichst hoher Durchfluß erzielt werden soll, beispielsweise also in Rohrleitungssystemen oder auch im Blutkreislauf. Gleiches gilt für umströmte Körper, wie z.B. Autos oder Flugzeugtragflächen. Turbulente Strömung ist in all diesen Fällen unerwünscht, weil sie den Widerstand für die Durch- bzw. Umströmung wesentlich erhöht. Dies liegt an den charakteristischen, chaotischen Verwirbelungen, die zur erhöhten Reibung innerhalb der Flüssigkeit führen. Doch es gibt auch Fälle, in denen die Turbulenz erwünscht ist: Leitungen in Wärmetauschern, z.B. in Kühlschränken, sollten turbulent durchströmt werden, da hier ein besserer Wärmetausch zwischen dem Fluidum und den Kühlflächen erreicht wird.

Der bestimmende Parameter für Reibung innerhalb realer Flüssigkeiten ist die Viskosität. Sie kann bildlich mit der Zähigkeit des Fluidums beschrieben werden. Die Viskosität ist ein wesentliches Charakteristikum strömender Flüssigkeiten. Beachtlich ist die Temperaturabhängigkeit der Viskosität. Sie erklärt sich aus der mikroskopischen Struktur realer Flüssigkeiten und ist Forschungsgegenstand beispielsweise in der Mineralölindustrie, da bei Schmiermitteln eine möglichst konstante Viskosität über einen weiten Temperaturbereich erwünscht ist (Motoröl).

2 Physikalische Grundlagen

1. Laminare Rohrströmung

Bei der laminaren, stationären Strömung einer Flüssigkeit durch ein Rohr haftet die äußerste Flüssigkeitsschicht an der Rohrwand. Jede -in Richtung Rohrmitte- darüberliegende Schicht gleitet auf der unteren Schicht mit einer etwas größeren Geschwindigkeit; somit fließt die Flüssigkeit in der Rohrmitte am schnellsten (Kraft zwischen zwei Flächenelementen $\sim \eta$). Es kann gezeigt werden, daß sich ein parabolisches Geschwindigkeitsprofil im Rohr einstellt. Wie hoch der totale Massendurchsatz ist, d.h. welches Flüssigkeitsvolumen dV pro Zeiteinheit dt durch das Rohr transportiert werden kann, hängt vom Druckabfall über der Rohrstrecke Δp , von der zugehörigen Rohrlänge L , vom Rohrradius r , und von der Viskosität η der Flüssigkeit ab. Diesen Zusammenhang beschreibt das Gesetz von **Hagen-Poiseuille**:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{8\eta L} \cdot \Delta p r^4$$

2. Umströmung von Kugeln

Wird eine Kugel mit konstanter Geschwindigkeit durch eine Flüssigkeit gezogen, so haftet im laminaren Fall (analog zur laminaren Strömung der Flüssigkeit in einem Rohr) die erste Flüssigkeitsschicht an der Kugeloberfläche, sie bewegt sich also mit der Kugelgeschwindigkeit v . Je weiter man von der Kugel weg geht, desto langsamer bewegen sich die Flüssigkeitsschichten. In einer Entfernung, die der Größenordnung des Kugelradius r entspricht, herrscht in der Flüssigkeit die Geschwindigkeit null. Die aneinander reibenden Flüssigkeitsschichten erzeugen eine der Bewegung entgegengesetzte Reibungskraft, deren Betrag proportional zu r , v und der Viskosität der Flüssigkeit η ist. Diese Abhängigkeit bezeichnet man als das Stokes'sche Gesetz.

$$\text{Stokes'sche Reibungskraft: } F = 6\pi\eta rv$$

Herrscht dagegen turbulente Umströmung (bei höherer Geschwindigkeit, kleinerer Viskosität etc.), so verhält sich die Reibungskraft gemäß dem Newton'schen Grenzfall.

$$\text{Newton'sche Reibungskraft: } F = \frac{1}{2}\rho Av^2 c_w$$

wobei $A = r^2\pi$ die Querschnittsfläche der Kugel und ρ die Dichte der Flüssigkeit bezeichnet. Die Newtonsche Formel gilt analog auch für andere Körperformen, wobei der sogenannte Widerstandsbeiwert c_w zwischen etwa 0.055 (stromlinienförmig) bis 1.3 (ungünstige Geometrie) liegen kann. Für eine Kugel gilt in guter Näherung $c_w = 1$.

3 Aufgaben zur Vorbereitung

3.1 Beschreibung des Ausfluß-Viskosimeters

Ein Ausfluß-Viskosimeter besteht aus einem Zylinder, an den Röhren (hier: Kapillaren) mit verschiedenen Innendurchmessern angebracht werden können. In den Zylinder wird die zu untersuchende Flüssigkeit gefüllt, welche sodann über die Kapillare ausfließt. Durch eine Skala am Zylinder kann die Höhe der Flüssigkeitssäule über die Versuchsdauer verfolgt werden. Wie schnell die Flüssigkeit ausfließt, hängt davon ab, welcher Massendurchsatz durch die Kapillare erreicht werden kann. Dieser Durchsatz wird - im Fall laminarer Strömung in der Kapillare - durch das Hagen-Poiseuillsche Gesetz beschrieben. Der Druckabfall über der Kapillare entspricht dem hydrostatischen Druck durch die Flüssigkeitssäule. Mit sinkendem Füllstand nimmt also der Durchsatz ab, die Flüssigkeit strömt immer langsamer aus. Bei Verwendung von kleineren Kapillardurchmessern wird der Massendurchsatz generell verringert, der Flüssigkeitsstand sinkt also langsamer; gleiches gilt für längere Kapillaren. Auch die Viskosität der Flüssigkeit hat einen Einfluß auf den Massendurchsatz; zähere Medien werden langsamer fließen als weniger viskose. Sind die apparativen Größen bekannt, kann durch eine geeignete Auswertung des zeitlichen Verlaufs des Füllstandes die Viskosität der Flüssigkeit bestimmt werden.

3.2 Aufgabe

Leiten Sie mit Hilfe des Hagen-Poiseuill'schen Gesetzes den zeitlichen Verlauf $h(t)$ der Höhe der Flüssigkeitssäule über der Kapillare im Ausfluß-Zylinder ab (zu benutzende Größen: Zylinderdurchmesser D , Kapillar-Innendurchmesser d , Kapillar-Länge L , Viskosität η und Dichte ρ der Flüssigkeit (vgl. Abb. 1)). Verwenden Sie dazu außerdem folgende Beziehungen:

$$\begin{array}{ll} \text{Druckdifferenz an der Kapillare:} & \Delta p = \rho gh \text{ (warum?)} \\ \text{Ausströmendes Volumen:} & dV = -\frac{1}{4}D^2\pi dh \end{array}$$

wobei dh die Höhenänderung der Flüssigkeitssäule bezeichnet. Da h abnimmt, also $dh < 0$ ist, muss das Minuszeichen eingeführt werden, um ein positives Ausflussvolumen zu erhalten. Bringen Sie die Abhän-

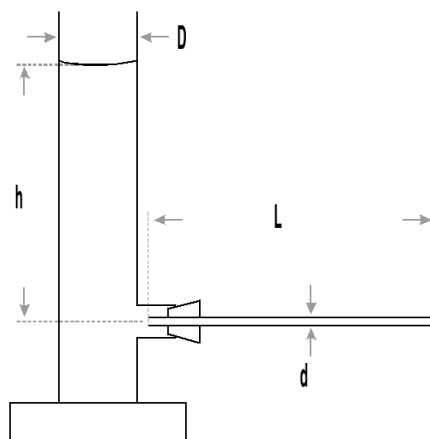


Abbildung 1: Ausfluß-Viskosimeter

gigkeit in folgende Form:

$$h = h_0 e^{-\alpha t} \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{\rho g}{32LD^2} \frac{d^4}{\eta}$$

3.3 Beschreibung des Kugelfall-Viskosimeters

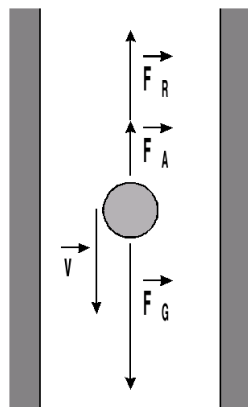


Abbildung 2: Kräfte diagramm im Kugelfall-Viskosimeter

Beim Ausfluß-Viskosimeter stehen sowohl die Viskosität und Dichte des zu untersuchenden Mediums als auch die apparativen Abmessungen in einem exponentiellen Zusammenhang mit der Meßgröße $h(t)$. Dies schränkt zum einen den mit dem Ausfluß-Apparat zugänglichen Wertebereich der Viskosität ein, zum anderen bewirken Unsicherheiten in der apparativen Auslegung einen großen Meßfehler.

Das Kugelfall-Viskosimeter stellt in dieser Hinsicht eine bessere Methode der Viskositätsbestimmung dar, die mit leichten Modifikationen auch im Industrielabor gebräuchlich ist (\rightarrow Kugelfall-Viskosimeter nach Höppner). Hier wird in die zu testende Flüssigkeit eine Kugel fallen gelassen. Auf Ihrem Weg durch das Medium beschleunigt die Kugel bis sie eine Geschwindigkeit erreicht hat, die durch das Kräftegleichgewicht zwischen Auftriebs- und Reibungskraft (F_A und F_R) einerseits und der Gewichtskraft F_G andererseits bestimmt wird (vgl. Abb. 2). Diese Geschwindigkeit kann über eine einfache Weg-Zeit Messung bestimmt und direkt in die Viskosität der Flüssigkeit umgerechnet werden.

Leiten Sie den Zusammenhang zwischen der Fallgeschwindigkeit v der Kugel (Durchmesser d_K , Dichte ρ_K) in der Flüssigkeit (Dichte ρ_{Fl}) und deren Viskosität η ab. Gehen Sie dabei davon aus, daß der Grenzfall der Stokes'schen Reibung gilt.

4 Versuchsdurchführung und Auswertung

4.1 Experimentelle Überprüfung der funktionalen Zusammenhänge; Bestimmung der Viskosität von Wasser mit dem Ausfluß-Viskosimeter

Messen Sie für zwei verschiedene Kapillaren den zeitlichen Verlauf der Wasserstandshöhe im Ausfluß-Zylinder. Achten Sie insbesondere darauf, daß die Kapillare exakt waagrecht gelagert ist und verwenden Sie nur Wasser für diesen Versuch. Decken Sie mit der Messung den Bereich zwischen Maximalfüllstand h_0 und ca. 5 cm Wassersäule über Kapillarenhöhe mit mindestens 15 Meßwerten ab. Tragen Sie die gemessenen Werte der Säulenhöhe logarithmisch gegen die Zeit in zwei separaten Diagrammen auf.

In unserem Versuch gelten folgende Apparateabmessungen:

Innendurchmesser des Zylinders:	$D = 30 (\pm 1) \text{ mm}$
Kapillarlängen:	$L = 250 \text{ mm}$
Innendurchmesser der Kapillaren:	$d_1 = 1.20 (\pm 0.08) \text{ mm}$ und $d_2 = 1.7 (\pm 0.1) \text{ mm}$ (Herstellerangaben)
Dichte von Wasser:	$\rho = 1.0 \text{ g/cm}^3$

Die beschriebene logarithmische Auftragung der Säulenhöhe, $\ln\left(\frac{h(t)}{h_0}\right)$, über der Zeit liefert eine Gerade. Was läßt sich daraus folgern?

Für die Kapillare mit dem größeren Durchmesser ergibt sich eine Abweichung von der idealen Geradenform. Was verursacht diese Abweichung? Berechnen Sie dazu die Reynoldszahl der Strömung jeweils für den Beginn der Meßreihen. (Reynoldszahl für Strömung in Röhre: $Re = (d \cdot \rho \cdot v) / \eta$, wobei v = mittlere Geschwindigkeit der Strömung; benutzen Sie für die Rechnung den Literaturwert für die Viskosität von Wasser bei Raumtemperatur: $\eta = 10,2 \cdot 10^{-8} \text{ Ns/cm}^2$.)

Durch Ermittlung der Steigung der Ausgleichsgeraden läßt sich direkt die Konstante α (siehe Aufgabe 3.2.) bestimmen. Überlegen Sie sich bei der Kapillare mit größerem Durchmesser, welcher Kurvenbereich für eine Bestimmung von α sinnvoll ist und verwenden Sie nur diesen. Bestimmen Sie die Viskosität η von Wasser für die zwei Werte von α gemäß

$$\eta = \frac{\rho g}{32LD^2} \cdot \frac{d^4}{\alpha}$$

Betrachtet man sich die relativen Fehler in den einzelnen Größen, so ist der Kapillardurchmesser d der Wert mit der größten Unsicherheit. Führen Sie eine Fehlerrechnung für die Bestimmung von η bezüglich des Fehlers von d durch (Fehler aus Spezifikation der Kapillaren):

$$\Delta\eta = \frac{\partial\eta}{\partial d} \cdot \Delta d$$

4.2 Bestimmung der Viskosität von Glycerin mittels Kugelfall-Experiment

Es soll die Viskosität von Glycerin bei verschiedenen Temperaturen bestimmt werden. Dazu werden Stahlkugeln mit verschiedenen, bekannten Durchmessers d_K der Dichte ρ_K in ein mit Glycerin gefülltes Zylinderglas fallen gelassen. Durch eine Weg-Zeit Messung soll jeweils die stationäre Fallgeschwindigkeit v gemessen werden. Aus dieser Größe kann dann die Viskosität η wie folgt ermittelt werden (siehe Aufgabe 3.3.):

$$\eta = \frac{1}{18} d_K^2 \frac{g(\rho_K - \rho_{Glyc})}{v}$$

Dichten:

Glycerin:	$\rho_{Glyc} = 1.26 \text{ g/cm}^3$,
Stahl:	$\rho_K = 7.85 \text{ g/cm}^3$

Stellen Sie zunächst das mit Glycerin gefüllte Zylindergefäß in ein Eiswasserbad. **Vermeiden Sie dabei jeglichen Kontakt des Glycerins mit Wasser (Spritzer etc.)**. Warten Sie, bis sich eine konstante Temperatur des Glycerins eingestellt hat und messen Sie die Viskosität wie oben beschrieben mit mehreren Stahlkugeln verschiedenen Durchmessers.

Erwärmen Sie dann das Glycerin durch Entfernen der restlichen Eiswürfel aus dem Wasserbad und **vorsichtige** Zugabe von warmen Wasser. Sorgen Sie durch stetes Umrühren des Wasserbads für eine möglichst homogene Temperaturverteilung. Führen Sie im Temperaturbereich bis 40 °C für vier weitere Temperaturen einen Kugelfallversuch mit der 2,5 mm Stahlkugel durch und ermitteln Sie die Viskosität. Tragen Sie die ermittelten Werte für die Viskosität über die Temperatur in ein Diagramm ein und diskutieren Sie den Verlauf.